附件1：《数学综合》考试大纲

全日制攻读教育硕士(学科教学（数学）)专业学位入学考试大纲

（“学科教学-数学”方向）

（科目：数学综合）

一、考查目标

全日制攻读教育硕士(学科教学（数学）)专业学位入学考试数学综合科目考试内容包括《数学分析》、《高等代数》两门数学学科基础课程，要求考生系统掌握《数学分析》、《高等代数》的基本知识、基础理论和基本方法，并能运用相关理论和方法分析、解决一些具体问题。

二、考试形式与试卷结构

（一）试卷成绩及考试时间

本试卷满分为150分，考试时间为180 分钟。

（二）答题方式

答题方式为闭卷、笔试。

（三）试卷内容结构

各部分内容所占分值为：数学分析90 分；高等代数60 分。

（四）试卷题型结构

（数学分析部分）

计算题5小题，每小题10分，共50分

分析讨论与证明题3小题，每小题10分，共30分

应用题1小题，10分

（高等代数部分）

计算题3小题，每小题10分，共30分

证明题1小题，10分

综合题1小题，20分

三、考查范围

**《数学分析》**

（一）考查目标

1、掌握数学分析的基本概念、基本理论和基本方法。

2、理解数学分析的极限思想，熟悉和掌握各种论证方法和计算方法；具备较好的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、基本运算能力和分析论证能力。

3、能够综合运用所学的数学分析的知识分析和解决一些实际问题。

（二）考查内容与要求

第一部分函数、极限与连续

1、考查内容

（1）函数

实数的概念、绝对值与不等式、数集的界与确界，函数概念、函数的基本特性（有界性、单调性、奇偶性、周期性），反函数与分段函数、隐函数、复合函数、初等函数。

（2）数列极限

数列极限的定义，数列极限的性质（唯一性、有界性、保号性、不等式性、迫敛性和四则运算法则），数列收敛的条件（柯西（Cauchy）收敛准则、单调有界定理、数列与其子列的关系），极限及其应用。

（3）函数极限

一元函数极限（六类型）的定义（语言）、单侧极限，函数极限的基本性质（唯一性、局部有界性、局部保号性、不等式性、迫敛性和四则运算法则），归结原则和柯西准则，两个重要极限（，）及其应用，无穷小量与无穷大量的概念，无穷小量的性质与阶的比较，一元函数极限计算的各种方法，多元函数（二元函数）重极限与累次极限的概念、基本性质与计算，二元函数重极限与累次极限的关系。

（4）函数的连续性

函数连续与间断的概念，一致连续的概念，连续函数的局部性质（局部有界性、局部保号性），有界闭集上连续函数的性质（有界性、最值性、介值性、一致连续性），初等函数的连续性。

2、考试要求

（1）了解实数的基本概念和基本性质，理解绝对不等式与基本不等式。

（2）熟练掌握函数的概念（包括定义域、值域、反函数与分段函数、隐函数、初等函数），理解函数的基本特性（有界性、单调性、奇偶性、周期性），熟悉基本初等函数的性质及其图形。

（3）掌握数列极限的定义，熟悉收敛数列的性质，掌握并会运用单调有界定理，了解柯西收敛准则。

（4）掌握一元函数极限的定义（两类），熟悉函数极限的性质和运算法则，理解一元函数单侧极限与极限、二元函数的重极限与累次极限及其关系，熟练掌握求数列极限和函数极限的基本方法（初等变形、变量替换、归结原则、迫敛性等），会求二元函数的累次极限和重极限。

（5）理解无穷小量的概念与性质、无穷小量阶的比较。

（6）熟悉两个重要极限（，）及其应用。

（7）熟练掌握函数在一点及在一个区间上连续的概念、分段函数的连续性，能够判定间断点的类别，掌握初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质（有界性、最值性、介值性、零点定理），了解一致连续的概念和一致连续性定理。

第二部分微分学

1、考查内容

（1）一元函数微分学

导数的概念及其几何意义，可导与连续的关系，求导公式与求导法则，微分的概念，导数与微分的关系，高阶导数。

（2）微分中值定理及其应用

费马定理，罗尔（Rolle）中值定理，拉格朗日（Lagrange）中值定理，柯西中值定理，泰勒（Taylor）公式，应用导数研究函数（洛必达（L’Hospital）法则、函数单调性、函数的极值、函数的最值、函数的凹凸性及拐点）。

（3）多元函数微分学

偏导数，全微分，可微与偏导数存在、连续之间的关系，复合函数的全微分与偏导数，方向导数与梯度，高阶偏导数，高阶混合偏导数与顺序无关性。

（4）隐函数定理及其应用

隐函数存在定理，隐函数求导（偏导）方法，几何应用（平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、空间曲面的切平面与法线），二元函数的极值，条件极值与拉格朗日乘数法及其应用。

2、考试要求

（1）掌握导数的概念与几何意义，理解单侧导数，掌握根据定义求函数在给定点的导数（包括单侧导数）。

（2）熟记求导公式，熟练掌握利用法则求函数的导数（包括参数方程确定的函数的导数、隐函数的导数、分段函数的导数）、高阶导数。

（3）理解微分、全微分的概念，理解可微的充分必要条件，理解可微与可导、全微分与偏导数的关系，能够判定多元函数的可微性。

（4）熟练掌握多元复合函数的偏导数、全微分的计算，方向导数的计算。

（5）理解并掌握微分中值定理（罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理），能够利用中值定理讨论函数零点的存在性问题、有关等式或不等式命题的证明等问题。

（6）熟练掌握利用洛必达法则求不定式函数极限的方法。

（7）理解泰勒公式，熟悉几个基本的麦克劳林公式（Maclaurin）（），了解利用泰勒公式证明不等式、求函数极限的基本思想和方法。

（8）熟练掌握利用导数讨论函数的单调性、函数的凹凸性，求一元函数的极值和最值的方法。

（9）理解二元函数极值的必要条件与充分条件，熟练掌握条件极值的拉格朗日乘数法，并用于解决实际问题。

（10）能够利用偏导数求空间曲线的切线和法平面、空间曲面的切平面和法线。

第三部分积分学

1、考查内容

（1）不定积分

原函数与不定积分的概念，基本积分公式，不定积分的计算方法（直接计算法、换元积分法、分部积分法），有理函数的积分，型与型的积分。

（2）定积分

定积分的概念与几何意义，可积条件（必要条件、充要条件），可积函数类，定积分的性质（积分区间可加性、不等式性、绝对可积性、积分第一中值定理），变限积分函数，微积分学基本定理，牛顿莱布尼茨公式与定积分的计算。

（3）反常积分

反常积分（无穷积分、瑕积分）的概念，柯西收敛准则，绝对收敛与条件收敛，反常积分收敛性判别法（比较原则、柯西判别法）。

（4）重积分

二重积分的概念与几何意义，二重积分的计算（化为累次积分、极坐标变换），改变累次积分次序，三重积分的概念，三重积分的计算（化为累次积分、柱坐标变换、球坐标变换）。

（5）曲线积分

曲线积分（第一型、第二型）的概念、性质与计算，格林（Green）公式，平面曲线积分与路径无关的条件。

（6）积分的应用

微元法思想，定积分的几何应用（平面图形的面积、旋转体体积、曲线的弧长），重积分的应用（立体体积、曲面面积）。

2、考试要求

（1）理解不定积分的概念及其性质，熟记基本积分公式，熟练掌握不定积分的换元积分法与分部积分法，熟悉不定积分计算的各种基本方法。

（2）掌握有理函数、三角函数有理式和简单的根式函数的积分方法。

（3）理解定积分的概念，掌握定积分的基本性质和可积准则，理解变限积分的性质，掌握微积分学基本定理和积分第一中值定理，熟练掌握定积分的计算。

（4）理解反常积分及其收敛、绝对收敛与条件收敛的概念，了解反常积分收敛性的基本判定方法。

（5）理解重积分（二重、三重）积分的概念和基本性质。

（6）掌握重积分化为累次积分的方法以及重积分变量代换方法。

（7）理解曲线积分（第一型、第二型）的概念、性质及两者之间的关系，熟练掌握曲线积分的计算，熟悉格林公式及应用、曲线积分与路径无关的条件。

（8）熟悉定积分的应用（平面图形的面积、曲线弧长、旋转体体积），重积分的应用（立体体积、曲面面积）。

第四部分级数

1、考查内容

（1）数项级数

级数及其敛散性，收敛级数的和，柯西准则，收敛必要条件，收敛级数基本性质；正项级数收敛的充要条件，比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式；交错级数的莱布尼茨判别法；一般项级数的绝对收敛与条件收敛。

（2）函数项级数

函数列与函数项级数的收敛与一致收敛性，柯西一致收敛准则，函数项级数一致收敛判别法（魏尔斯特拉斯判别法），函数列的极限函数与函数项级数和函数的分析性质（连续性、可积性、可微性）及其应用。

（3）幂级数

幂级数的概念，阿贝尔定理，收敛半径与收敛域，幂级数逐项积分、逐项求导及其应用，幂级数各项系数与其和函数的关系，初等函数的幂级数展开，泰勒级数，麦克劳林级数。

2、考试要求

（1）掌握数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念，级数收敛的柯西准则，收敛和绝对收敛级数的性质。

（2）熟练掌握正项级数收敛判别法（比较原则、比试判别法、根式判别法），掌握交错级数的莱布尼兹判别法，理解一般项级数的常规判别法，能计算一些收敛级数的和。

（3）理解函数列与函数项级数收敛和一致收敛的意义，掌握函数项级数一致收敛的判别法（魏尔斯特拉斯判别法），理解函数项级数和函数的性质。

（4）理解幂级数的概念并能确定其收敛半径和收敛域，掌握幂级数的性质和运算法则，熟悉几个初等函数的幂级数展开式（），可以求简单函数的幂级数展开式以及利用幂级数运算求数项级数的和。

**参考书目：**《数学分析》(第五版，上、下册)，华东师范大学数学系编，高等教育出版社，2019.

**《高等代数》**

考查目标

1、掌握高等代数的基本概念、基本理论和基本方法。

2、理解高等代数中的分类、表示思想，掌握各种推理论证方法和计算方法；具备良好的抽象思维、逻辑推理和空间想象等能力。

3、能够综合运用高等代数的理论、方法分析和解决一些具体问题。

二、考查内容与要求

第一部分 行列式

1、考查内容

（1）n阶行列式的定义和性质，行列式按行（列）展开的公式

（2）克拉默(Cramer)法则

2、考试要求

（1）理解n阶行列式的定义, 能用定义计算一些特殊行列式。

（2）理解行列式的基本性质，能利用行列式性质计算一些简单行列式。

（3）掌握行列式按行（列）展开的公式，掌握“化三角形法”、“递推降阶法”、“数学归纳法”等计算行列式的技巧。

（4）掌握克拉默(Cramer)法则。

第二部分 线性方程组

1、考查内容

（1）线性方程组的消元法

（2）n维向量的概念、运算、性质

（3）向量组的线性相关性

（4）矩阵的秩，线性方程组有解的判别法

（5）线性方程组解的结构

2、考试要求

（1）理解向量组的线性相关性的基本概念和结论。

（2）掌握矩阵的秩、向量组的秩及极大线性无关组的求法。

（3）掌握线性方程组的有解判别定理。

（4）理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握基础解系的求法、线性方程组的结构定理，会求一般线性方程组的全部解。

第三部分 矩阵

1、考查内容

（1）矩阵的运算、性质

（2）矩阵乘积的行列式与秩

（3）可逆矩阵的概念、性质，用公式法求逆矩阵

（4）分块矩阵的运算、应用

（5）初等矩阵与初等变换的关系，用初等变换求逆矩阵的方法

2、考试要求

（1）能熟练地进行矩阵的运算。

（2）熟悉矩阵乘积的行列式及秩的定理。

（3）理解可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵等概念，掌握一个n阶方阵可逆的充要条件和用公式法求逆矩阵。

（4）掌握分块矩阵的加法、乘法的运算及性质。

（5）理解初等矩阵与初等变换之间的关系，会用初等变换的方法求逆矩阵。

第四部分 线性空间

1、考查内容

（1）线性空间的定义和性质

（2）线性相关性、维数、基和坐标

（3）基变换和坐标变换，过渡矩阵

（4）线性子空间、子空间的交与和、直和、维数公式

（5）线性空间的同构

2、考试要求

（1）理解和掌握线性空间的定义及性质，会判断一个代数系统是否是线性空间。

（2）理解基、维数、坐标的概念，掌握基、维数、坐标的求法。

（3）理解和掌握基变换与坐标变换的关系。

（4）理解线性子空间的定义，掌握向量组生成子空间的定义及等价条件。

（5）掌握子空间的交与和的定义及性质；熟练掌握维数公式。

（6）理解子空间的直和的概念及和为直和的充要条件。

（7）理解和掌握线性空间同构的定义、性质及两个有限维空间同构的充要条件。

第五部分 线性变换

1、考查内容

（1）线性变换的定义、性质和运算

（2）线性变换和矩阵的关系

（3）特征值、特征向量

（4）对角化问题

（5）线性变换的值域、核、不变子空间

2、考试要求

（1）理解线性变换的定义及性质，掌握线性变换的运算及运算规律。

（2）理解和掌握线性变换与矩阵的关系，掌握矩阵相似的概念和线性变换在不同基下的矩阵相似的性质。

（3）理解和掌握矩阵的特征值、特征向量、特征多项式的概念和性质，会求一个矩阵的特征值和特征向量，掌握相似矩阵与它们的特征多项式的关系及哈密顿-凯莱定理。

（4）掌握n 维线性空间中一个线性变换在某一组基下的矩阵为对角形的充要条件。

（5）掌握线性变换的值域、核、秩、零度等概念，掌握线性变换的值域与它对应的矩阵的秩的关系及线性变换的秩和零度间的关系。

（6）掌握不变子空间的定义，会判定一个子空间是否是不变子空间，理解不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系。

第六部分 欧几里得空间

1、考查内容

（1）欧几里得空间的定义及基本性质

（2）标准正交基、施密特（Schmidt）正交化方法

（3）欧几里得空间的同构

（4）正交变换与正交矩阵

（5）化实对称矩阵为对角形

2、考试要求

（1）理解欧几里得空间和内积的定义及性质；掌握两个向量正交及度量矩阵的概念和基本性质。

（2）理解正交向量组、标准正交基的概念，掌握施密特正交化过程。

（3）理解两个欧几里得空间同构的定义，掌握两个有限维欧几里得空间同构与空间维数之间的关系。

（4）理解正交变换的概念，掌握正交变换与向量的长度、标准正交基、正交矩阵间的关系。

（5）理解两个子空间正交的概念，掌握正交与直和的关系，及欧氏空间中的每一个子空间都有唯一的正交补的性质。

（6）理解和掌握利用正交矩阵将一个实对称矩阵化为对角矩阵的方法。

**参考书目：**《高等代数》(第五版)，北京大学数学系前代数小组编，王萼芳，石生明修订，高等教育出版社，2019.