《复变函数》课程教学大纲

一、课程简况

课程名称（中文）：复变函数

课程名称（英文）：Complex Variable Function

课程代码：072016

课程类别：专业核心课

课程类型：必修课

学时学分：总学时 48 学分 3 其中实践学时 0

开出时间：二 年级 2 学期

开课单位：数学与统计学院

适用专业 数学与应用数学专业

先修课程：数学分析、高等代数、解析几何

考核方式：考查

执　　笔：邵仪

审　　核：王传利

二、课程目标

复变函数是数学与应用数学专业（师范）的必修课程。通过本课程的学习，学生可以复述复分析的基本概念、基本理论和基本方法，以及单复变函数的分析理论和几何理论的基本内容，主要包括解析函数、复积分以及级数等。学生可以总结归纳近代复分析的基本思想，并以它独有的研究方法与研究工具，加深对数学分析相关知识的综合运用，为后续课程的学习和从事数学研究或教学工作奠定必要的数学基础。

具体课程目标如下：

目标 1：（支撑毕业要求： 指标 1-3）

写出复数的基本概念、几何意义、复数的各种运算方式以及复变函数的概

念、极限、连续。

目标 2：（支撑毕业要求：指标 2-3）

写出复变函数导数与微分运算、解析函数概念及初等解析函数的定义与基本性质。

目标 3：（支撑毕业要求：指标 2-3、6-3）

写出复变函数积分概念并能应用这些概念进行复积分运算，能够应用 Cauchy 积分公式及定理。

目标 4：（支撑毕业要求：指标 3-2、7-3）

默写复变函数中初等函数的泰勒展式，并能应用初等函数的展开式计算一般解析函数的幂级数展开式。

目标 5：（支撑毕业要求：指标 8-1）

能够辨别复变函数孤立奇点类型，运用解析函数在奇点附近的洛朗展式。

目标 6：（支撑毕业要求：指标 3-2、4-3）

能够写出留数概念、相关性质，应用留数概念及性质计算留数，运用留数定理熟练计算复围线积分和实积分。

三、课程目标与毕业要求的对应关系

毕业要求	毕业要求指标点	**课程目标**
1.师德规范 指标 1-3	具备较高的思想道德修养，立志成为有理想信念、有道德情操、有扎实学识、有仁爱之心的好老师。	1
2.教育情怀 指标 2-3	尊重学生、关爱学生，借助自己的人文底蕴和科学精神，做学生发展的引路人。	2、3
3. 学科素养 指标 3-2	能够解释数学学科基本理论、基本原理，能够从生活实际中抽象出数学问题并能分析和解决问题。	4、6

4. 教学能力 指标4-3	能够将学科知识、教育理论与教育实践相结合，能够利用现代教育技术作为教学工具，具有教师教学的实践能力及进行一定的教学研究的能力。	6
6. 综合育人 指标6-3	说出数学学科育人价值，能够融合数学学科核心素养进行育人活动，学会在中学数学课堂教学中融入思政元素。	3
7. 学会反思 指标7-3	具备终生学习的身体与心理基础。具备一定的人文素养，能够充分认识到终生学习的重要性，规划自己的未来发展目标。	4
8. 沟通合作 指标8-1	说出学习共同体的作用，参与小组合作学习，具有适应能力和协调合作能力。	5

四、学习内容、重点难点及学时安排

（一） 学习内容及重难点

第一章　复数与复变函数(支撑课程目标 1)

一、学习目的

通过本章学习，能够写出复数的基本概念及性质，如复数的模、辐角、复数的三种表示方式，平面点集和平面曲线的概念以及复变函数概念，计算复变函数的极限， 叙述复变函数的连续性等性质，并能够在中学教学中加以应用。

二、学习要求

1、 写出复数及复数的模、辐角等相关概念；理解复数的几何表示、三角表示、指数表示方法；应用各种形式进行复数的运算。

2、叙述复平面上点集的基本概念；理解区域、闭域等相关概念。

3、叙述复平面上曲线的相关概念（连续曲线、简单曲线、逐段光滑曲线及曲线的长度)；叙述 Jordan 定理（定理的证明不做要求)；能够应用复平面上曲线

的参数方程表示方法。

4、叙述复变函数的定义及相关概念。

5、叙述复变函数的极限及连续性以及有界闭集上连续函数的性质。

6、了解扩充复平面、复球面、无穷远点的定义及性质。

三、学习重点及难点

1、学习重点

复数的定义和几何表示。

2、学习难点

扩充平面和复数的球面表示，区域与约当曲线，复变函数的连续性。

四、学习内容：

第一节 复数

知识要点：复数及代数运算，共轭复数、复数的几何表示、模、辐角，复数域、复平面。

第二节 复平面上的点集

知识要点：复平面上点集的基本概念（邻域、聚点、孤立点、内点、外点、边界点、开集、闭集、有界集），区域、闭域。

第三节 复变函数

知识要点：复平面上的曲线及有关概念，Jordan 定理；复变函数的概念；复变函数的极限，连续性，有界闭集上连续函数的性质；

第四节 复球面与无穷远点

知识要点：复变函数扩充复平面概念。

五、学习参考习题

1、教材第一章习题

2、课外作业

（1）复变函数与数学分析中的实值函数有哪些不同？

（2）复数用向量表示与解析几何中的向量表示有什么区别？

第二章　解析函数(支撑课程目标 2)

一、学习目的

通过本章学习，计算复变函数的导数与微分，叙述复变函数导数与微分的运算法则。应用 C-R 条件会判别解析函数，并说出初等解析函数与实变量函数不同的性质，拓宽知识面，加深对可导、可微及解析函数的认知。

二、学习要求

1、叙述复变函数导数与微分的概念，并应用导数与微分的运算法则及其基本性质。

2、叙述解析函数的概念，C-R 条件、解析的充要条件，并能应用于判定函数的解析性及计算导数。

3、叙述初等解析函数的定义及其基本性质，能够辨别与实变量中相应函数不同的性质。

4、了解多值函数及其支点、支割线的概念、初等多值函数及其简单性质。

三、学习重点及难点

1、学习重点

解析函数的概念，Cauchy-Riemann 方程和初等全纯函数。

2、学习难点

解析函数的判别，解析函数与可微的区别与联系。

四、学习内容

第一节 解析函数概念与柯西-黎曼方程

知识要点：复变函数的导数、微分及其基本性质；解析性的概念，C-R 条件，解析的第一个充要条件。

第二节 初等解析函数

知识要点：初等解析函数（幂函数 z^n、指数函数 e^z、三角函数 $\sin z, \cos z, \tan z, \cot z$）。

第三节 初等多值函数（学生自学）

知识要点：支点、支割线，初等多值函数（根式函数 $\sqrt[n]{z}$、对数函数 Lnz、反三角函数、一般幂函数、一般指数函数）简介。

五、学习参考习题

1、教材第二章习题

2、课外作业

（1）举例说明复变函数的解析函数及连续性之间的关系与实值函数可导及连续性之间关系的区别。

（2）比较几个常用解析函数如正弦函数、余弦函数及指数函数的性质与其自变量取实数时的区别与联系。

第三章　复数函数的积分(支撑课程目标 3)

一、学习目的

通过本章学习，辨别复积分与实积分的区别及联系，应用参数方程计算复积分。并能够应用 Cauchy 积分定理计算围线积分，写出解析函数的无穷可微性，应用充要条件判别解析函数。

二、学习要求

（1）写出复变函数积分的定义，说明复积分与曲线积分的关系、连续函数的可积性。

（2）叙述复积分的性质，应用参数方程计算复积分。

（3）叙述 Cauchy 积分定理及其推广（此处各定理的证明不做要求），并能应用于积分的计算。

（4）分析积分与路径的无关性，并能用于复积分的计算。

（5）叙述 Cauchy 积分公式及相关定理和结论、 Morera 定理及解析函数的充要条件，能应用这些定理证明相关问题。

三、学习重点及难点

1、学习重点

Cauchy 积分定理、Cauchy 积分公式的应用。

2、学习难点

Cauchy 积分定理的证明。

四、学习内容

第一节　复积分概念及其简单性质

知识要点：复变函数积分的定义，与曲线积分的关系，连续函数的可积性。复积分的性质，复积分的计算（参数方程表示的曲线）。

第二节 柯西积分定理

知识要点：Cauchy 积分定理及其推广，积分与路径的无关性，原函数与不

定积分。

第三节 柯西积分公式及其推论

知识要点：Cauchy 积分公式，平均值公式。解析函数的无穷次可微性及解析的第二个充要条件。Cauchy 不等式与 Liouville 定理，Morera 定理与解析的第三个充要条件。

五、思政目标：

通过学习柯西积分定理及柯西积分，了解柯西的生平事迹，以及对数学做出的巨大贡献和成果，激励学生对科学的钻研精神和兴趣。

六、学习参考习题

1、教材第三章习题

2、课外作业

（1）分析与比较复变函数的积分与数学分析中曲线积分之间的联系与区别。

（2）总结复变函数的积分相对数学分析中的曲线积分有什么特点与优点。

第四章　解析函数的幂级数表示法(支撑课程目标 4)

一、学习目的

通过本章学习，应用实数项级数性质，分析复数项级数的性质，计算复数项幂级数的收敛半径和收敛圆。能够应用一些初等函数的泰勒展式求一些一般解析函数的泰勒展式。叙述解析函数零点孤立性与唯一性等性质，从而加深与区别实变量函数的相关知识点。

二、学习要求

1、能够写出复数项级数及其基本性质，叙述复函数项级数的一致收敛性，和函数的连续性、解析性。

2、应用幂级数性质求幂级数的收敛半径和收敛圆，叙述幂级数的收敛特性，和函数的解析性。

3、叙述 Taylor 定理，解析的第四个充要条件。

4、能够应用一些初等函数的 Taylor 展开式,计算一些解析函数的 Taylor 展开式。

5、计算解析函数在零点的阶数，叙述零点孤立性定理、唯一性定理和最大模原理，并能够用于证明一些相关问题。

三、学习重点及难点

1、学习重点

幂级数收敛半径的计算，全纯函数的 Taylor 展开。

2、学习难点

最大模原理和 Schwarz 引理，解析函数唯一性定理的应用。

四、学习内容

第一节 复级数基本性质

知识要点：复数项级数及基本性质。复函数项级数的一致收敛性及和函数的连续性、解析性（Weierstrass 定理）。

第二节 幂级数

知识要点：幂级数的收敛特性，收敛半径与收敛圆，和函数的解析性。

第三节 解析函数的泰勒展式

知识要点：Taylor 定理，解析的第四个充要条件；一些初等函数的幂级数展开式$e^z,\sin z,\cos z,Ln(1+z),(1+z)^\alpha$将解析函数展开为幂级数（间接法）。

第四节 解析函数零点的孤立性及惟一性定理

知识要点：解析函数零点的级，零点的孤立性，唯一性定理、最大模原理。

五、参考习题

1、教材第四章习题

2、课外作业

（1）分析复数域中的幂级数与实数域的幂级数的区别及共同点。

（2）举例说明唯一性定理的本质及其应用。

第五章 解析函数的罗朗展式与孤立奇点(支撑课程目标 5)

一、学习目的

通过本章学习，计算奇点附近洛朗展式，并会辨别与泰勒展式的区别与联系。会分析孤立奇点的类型，并叙述不同奇点具有的不同性质。扩展幂级数的知识视野，激发学生的求知欲。

二、学习要求

1、叙述双边幂级数及其简单性质。

2、叙述 Laurent 定理、Laurent 级数及与 Taylor 级数的关系，会计算一些解析函数的 Laurent 展开式。

3、叙述解析函数奇点、孤立奇点的概念，分析孤立奇点的类型。

4、叙述解析函数在可去奇点的特性，了解 Schwarz 引理。

5、叙述解析函数极点的特性。

6、了解解析函数在本性奇点附近的特性。

7、写出解析函数在无穷远点的性质，计算解析函数在无穷远点的Laurent展开式。

8、了解整函数与亚纯函数。

三、学习重点及难点

1、学习重点

解析函数孤立奇点类型的判定及其特性。

2、学习难点

全纯函数的 Laurent 展开。

四、学习内容

第一节 解析函数的洛朗展式

知识要点：双边幂级数；Laurent 定理，Laurent 级数及其与幂级数的关系。

第二节 解析函数的孤立奇点

知识要点：解析函数在孤立奇点的 Laurent 展开式；解析函数在三类孤立奇点（可去奇点、极点、本性奇点）附近的性质，

第三节 解析函数无穷远点性质

知识要点：解析函数在无穷远点的性质。

五、学习参考习题

1、教材第五章习题

2、课外作业

（1）举例说明各种奇点的常用判定方法。

（2）举例说明将一个复变函数在圆环域展成洛朗级数的常见方法。

第六章　留数理论及其应用(支撑课程目标 6)

一、学习目的

通过本章学习，通过辨认不同的奇点，会计算不同奇点的留数，能够分析应用留数计算复积分与柯西积分定理计算复积分的区别与联系；能够应用留数计算三种实积分；能够应用辐角原理估计解析函数的零点个数。

二、学习要求

1、叙述留数的定义，领会留数定理，会计算不同奇点的留数（包括无穷远点处留数的计算）。

2、应用留数计算实积分（$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$型，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 型，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$ 型）的方法。

3、写出对数留数的定义，叙述对数留数与零点和极点个数的关系。

4、叙述 Rouché定理、辐角原理，并能够应用于估计解析函数在区域内零点的个数。

三、学习重点及难点

1、学习重点

留数定理，Rouché定理和辐角原理，求无穷远点处的留数。

2、学习难点

利用留数定理计算复围线积分和实积分。

四、学习内容

第一节 留数

知识要点：留数的定义，留数定理，留数的计算。

第二节 用留数定理计算实积分

知识要点：利用留数计算实积分（主要讲解$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$型，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 型，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$ 型三种类型）。

第三节 辐角原理及其应用

知识要点：对数留数，辐角原理，Rouché定理，解析函数在区域内零点个数的估计。

五、学习参考习题

1、教材第六章习题

2、课外作业

（1）用留数计算积分与柯西积分公式计算积分有什么区别与联系？

（2）举例说明用留数计算实积分的优点是什么？

（二） 学习内容与课程目标对应关系

章	课程目标 1	课程目标 2	课程目标 3	课程目标 4	课程目标 5	课程目标 6
第一章	M	L	L	L	L	L
第二章	M	H	M	M	M	M
第三章	M	M	H	M	M	H
第四章	L	H	M	H	M	M
第五章	L	H	M	M	H	M
第六章	M	M	M	M	H	H

（其中 L 表示程度低，M 表示中等，H 表示高）

(三) 课程学时安排

章	知识点	学习内容	学时分配
1	**复数与复变函数**	复数（2 课时） 复平面上的点集（2 课时） 复变函数、复球面与无穷远点（2 课时）	6
2	**解析函数**	解析函数概念与柯西-黎曼方程（4 课时） 初等解析函数（2 课时）	6
3	**复变函数的积分**	复积分概念及其简单性质（2 课时） 柯西积分定理（4 课时） 柯西积分公式及其推论（4 课时）	10

4	**解析函数的幂级数表示法**	复级数基本性质（2 课时） 幂级数（2 课时） 解析函数的泰勒展式（2 课时） 解析函数零点的孤立性及惟一性定理（2 课时）	8
5	**解析函数的罗朗展式与孤立奇点**	解析函数的洛朗展式（4 课时） 解析函数的孤立奇点（4 课时） 解析函数无穷远点性质及 整函数与亚纯函数概念（2 课时）	10
6	**留数理论及其应用**	留数（4 课时） 用留数定理计算主要三类实积分（2 课时） 辐角原理及其应用（4 课时）	8

五、课程学习手段与方法

（一）学习手段

本课程采用主要以教师讲授与学生自学为主的学习手段。在学习基本概念，基本理论和基本方法的环节，主要以多媒体为主的学习方式。对大纲中知晓层次的内容以学生自学为主，以培养学生的自主学习能力，也为学有余力的学生拓展知识面，提高学习数学的钻研兴趣。

加强师生互动，推动课堂教学的主体从“以教为主”向“以学为主”转变。课后布置课本习题作为作业，以周为单位收集作业批改，记录学生作业等级，对于综合性知识较多的章节，以学习小组的形式练习写一些小论文，作为课程的部分平时考核成绩。

（二）学习方法

本课程主要采用讲授、讨论、分组研究的学习方法。对于基本概念采用启发式的学习方法，对于理论知识，采用讲授、分组讨论式学习。每一节都布置一定量的习题加强计算能力和对理论知识的运用。适当安排课时对典型习题进行讲解，对学生的疑难问题进行答疑。

六、课程学习评价

（一）考核评价方式

1. 过程性考核评价方式

本课程的过程性考核评价方式：占比 50%，主要包括考勤、作业、课堂表现、单元测验以及学习小组集体完成任务的形式。这一部分形成学生的平时成绩分数。具体比例如下：

1. 考勤：占比 10%，主要考核学生的上课出勤率。

2. 平时作业：占比 15%，主要考核学生对每节课作业的完成情况。

3. 课堂表现：占比 5%，主要通过课堂提问的回答情况，以及课堂纪律情况。

4. 单元测验：占比 15%，主要考核对章节知识点的掌握情况，每章结束后进行，闭卷。

5. 学习小组（5人左右一组）：占比5%，学习小组集体完成课外作业或单元综合练习或或撰写课程小论文等方式，考核学生的团结协作能力，综合运用知识的能力；

2. 结果性考核评价方式

本课程的结果性考核评价方式为期末考试：占比 50%，主要考查学生对复变函数这门课程中所有基本概念和基本理论的运用程度，以及考查学生求解复数积分、洛朗展式、留数等的计算能力。

课程教学目标	考核内容	评价依据	支撑的毕业要求
课程目标 1	复数的模、辐角、复数的三种表示方式，平面点集和平面曲线的概念以及复变函数概念，求复变函数的极限，会判断复变函数的连续性等性质。	过程性考核：考勤、作业、课堂提问。 结果性考核：期末考试	指标1-3
课程目标 2	复变函数的导数与微分，复变函数导数与微分的运算法则，C-R条件，判别解析函数。	过程性考核：考勤、作业、课堂提问。 结果性考核：期末考试	指标2-3

课程目标 3	用参数方程计算复积分，应用 Cauchy 积分定理计算围线积分，解析函数的无穷可微性，解析函数的充要条件。	过程性考核：考勤、作业、单元测验、学习小组成绩。 结果性考核：期末考试	**指标2-3、6-3**
课程目标 4	幂级数的收敛半径和收敛圆，初等函数的泰勒展式，一般解析函数的泰勒展式计算，解析函数零点孤立性与唯一性。	过程性考核：考勤、作业、课堂提问。 结果性考核：期末考试	**指标3-2、7-3**
课程目标 5	孤立奇点附近的洛朗展式，孤立奇点的类型，不同孤立奇点的性质。	过程性考核：考勤、作业、单元测验。 结果性考核：期末考试	**指标8-1**
课程目标 6	孤立奇点的留数计算，利用留数计算三种实积分。应用辐角原理估计解析函数的零点个数。	过程性考核：考勤、作业、单元测验、学习小组成绩。 结果性考核：期末考试	**指标3-2、4-3**

七、成绩评定与评分标准

由于本课程是考查课， 期末考试成绩占 50%（可以采取闭卷或开卷考试形式），过程性考核占 50%，其中包括平时作业、单元测验、学习小组集体完成单元练习及课外作业、考勤、课堂表现等。

过程性考核与结构性考核（期末考试）的成绩评定与评分标准占比分值如下表所示：

	考 勤	平时作业	课堂表现	单元测验	小组学习	期末考试	课程分目标达成评价方法
	占分比例 10%	占分比例 15%	占分比例 5%	占分比例 15%	占分比例 5%	占分比例 50%	
课程目标 1	10	10	10	0	0	10	分目标达成度= 0.5*分目标试题平均 /分目标试题总分+0.5*分目标平时成绩/分目标总分
课程目标 2	15	15	15	0	0	15	
课程目标 3	20	20	20	40	50	20	
课程目标 4	15	15	15	0	0	15	
课程目标 5	20	20	20	20	0	20	
课程目标 6	20	20	20	40	50	20	

八、课程教学资源

（一）选用教材

复变函数论（第四版），钟玉泉编， 高等教育出版社，2013.

（二）参考书目

[1]余家荣,复变函数（第三版）[M]，北京：高等教育出版社，2000.

[2]路可见等，复变函数[M],武汉大学出版社，2004.

[3]方企勤,复变函数教程[M]，北京：北京大学出版社，1996.

[4]郑建华,复变函数[M]，北京：清华大学出版社，2005.

（三）网络资源

（1）复变函数习题解答网站：

https://wenku.baidu.com/view/a693ebae88eb172ded630b1c59eef8c75ebf9573.html.

九、课程学习建议

课程学习以基本理论、基本技能为主，重视训练对基本理论、基本技能的综合运用程度和利用所学知识解决问题的能力。 写出与叙述层次的内容约占

70%，分析应用层次的内容约占 30%，了解层次的内容，一般不需考核。

复变函数是数学分析课程的后续与推广，在学习复变函数理论和计算问题时，通过做一定数量的题目，加强练习，同时要和数学分析内容对比学习，区分它们的相同点与不同点，这样不仅便于学习和领会复变函数的知识内容，而且有助于加深对数学分析知识的领会。

日期：2023 年 5 月 12 日